绝密 ★ 考试结束前

全国2019年4月高等教育自学考试

线性代数试题

课程代码:02198

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

说明：在本卷中，A^{T}表示矩阵A的转置矩阵，A^{*}表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\mathrm{r}(A)$表示矩阵A的秩.

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=k$，则$\begin{vmatrix} 2a_1 & 6a_2 \\ b_1 & 3b_2 \end{vmatrix}=$

A. k　　B. $2k$

C. $3k$　　D. $6k$

2. 设A为2阶矩阵，将A的第1行与第2行互换得到矩阵B，再将B的第2行加到第1行得到单位矩阵 ，则$A^{-1}=$

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. 设向量$\beta=(2,1,b)^{\mathrm{T}}$可由向量组$\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,3,a)^{\mathrm{T}}$线性表出，则数$a,b$满足关系式

A. $a-b=4$　　B. $a+b=4$

C. $a-b=0$　　D. $a+b=0$

4．设齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=0\\kx_1+x_2+x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解，则数$k=$

A．-2　　　　B．-1

C．1　　　　D．2

5．设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为2，则$\boldsymbol{A}$的非零特征值个数为

A．0　　　　B．1

C．2　　　　D．3

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6．行列式$\begin{vmatrix}0&0&3\\3&2&5\\2&0&7\end{vmatrix}=$_________.

7．已知行列式$\begin{vmatrix}2&0&3\\a&b&c\\1&1&1\end{vmatrix}=1$，则$\begin{vmatrix}2&0&3\\a-1&b+1&c-1\\1&1&1\end{vmatrix}=$_________.

8．$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=$___________.

9．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2\\0&2\end{pmatrix}$，若$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{B}=$___________.

10．设向量组$\alpha_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$的秩为2，则数$a=$_________.

11．设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,-2)^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$表示$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的内积，则$\boldsymbol{\beta}-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha}=$

_________.

12. 设 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵经初等行变换化为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&0\\0&2&-1&3&-1\\0&0&a-2&0&1\\0&0&0&a-2&0\end{array}\right)$$

若该线性方程组有惟一解，则数 a 的取值应满足_________.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $|\boldsymbol{A}|=$_________.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且满足 $|3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为_________.

15. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2-(x_2+x_3)^2$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=$ ___________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_1-b_1&a_1-b_2&a_1-b_3\\a_2-b_1&a_2-b_2&a_2-b_3\\a_3-b_1&a_3-b_2&a_3-b_3\end{vmatrix}$.

17. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^5$.

18. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&5\\-1&0&3\end{pmatrix}$，

求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

19. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&0&1&-2\\-3&-2&-1&0\\1&3&-2&7\end{pmatrix}$ 的秩和列向量组的一个极大无关组，并将其余列向量

由该极大无关组线性表出.

20．设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = b \end{cases}$$

确定数a,b为何值时，方程组有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．设$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = -2$是实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的2个特征值，λ_1对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1)^{\mathrm{T}}$.

求λ_2对应的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_2$与矩阵$\boldsymbol{A}$.

22．用配方法化二次型$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$为标准形，并写出所作的可逆线性变换.

四、证明题：本题7分。

23．已知向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表出. 证明：如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，则表示法惟一.