

全国 2017 年 4 月高等教育自学考试

线性代数试题

课程代码:02198

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。
2. 每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

说明:在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

一、单项选择题(本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请将其选出并将“答题纸”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 已知 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -2$, 则 $\begin{vmatrix} -3a_2 & a_1 + 2a_2 \\ -3b_2 & b_1 + 2b_2 \end{vmatrix} =$

- A. -6 B. -2 C. 2 D. 6

2. 若矩阵 A 中有一个 r 阶子式不为零,且所有 $r+1$ 阶子式都为零,则

- A. $r(A) < r$ B. $r(A) = r$ C. $r(A) > r+1$ D. $r(A) = r+1$

3. 设向量组 $\alpha = (1, 0, 0)^T$, $\beta = (0, 1, 0)^T$, 下列向量中可以表为 α, β 线性组合的是

- A. $(2, 1, 1)^T$ B. $(2, 0, 1)^T$ C. $(2, 1, 0)^T$ D. $(0, 1, 1)^T$

4. 设线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解,则 k 的值为

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 A 的特征值为 1, 2, 3, 则 $x =$

A. -2

B. 2

C. 3

D. 4

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题(本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分)

6. 行列式 $\begin{vmatrix} \sin \alpha + \cos \alpha & -\sin \alpha + \cos \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a_1 x + a_0$, 则 $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 设 A 为 2 阶矩阵, 若将 A 第二列的 2 倍加到第一列得到矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,
则 $A = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 设 A, B 均为 2 阶可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} 3A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (3, 0, k)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, 3)^T$ 线性相关, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

11. 设 α_1, α_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, k_1, k_2 是常数, 若 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2$ 也是 $Ax = b$ 的一个解, 则 $k_1 + k_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = a \\ x_2 - x_3 = b \\ x_1 + x_3 = c \end{cases}$ 有解, 则数 a, b, c 应满足 $\underline{\hspace{2cm}}.$

13. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, -2, 3, 则 $|A^2 + E| = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. 若 n 阶矩阵 A 满足 $|3E + 2A| = 0$, 则 A 必有一个特征值为_____.

15. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$ 的矩阵为_____.

三、计算题 (本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分)

16. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{vmatrix}$.

17. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $A^2 + 2A + E$.

18. 设矩阵 A 和 B 满足 $AB = A + 2B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B .

19. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1, 4)^T$, $\alpha_2 = (0, 3, -1, -3)^T$, $\alpha_3 = (1, -2, 8, 8)^T$, $\alpha_4 = (2, 3, 8, 9)^T$ 的一个极大无关组, 并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20. 设线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ kx_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + (k+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

确定 k 取何值时, 方程组有惟一解、无解、有无穷多解, 并在有无穷多解时求出其通解 (要求用其一个特解和导出组的基础解系表示).

21. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与对角矩阵 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 相似, 求常数 a 的值和可逆矩阵

P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

22. 求正交变换 $x = Qy$, 将二次型 $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ 化为标准形.

四、证明题 (本题 7 分)

23. 设 n 阶矩阵 $A \neq E$, 且满足 $r(A + E) + r(A - E) = n$, 证明: -1 是 A 的一个特征值.